Soluție

1. a) Se arată că $\det(A)=0 \Leftrightarrow m\in\{1,2\}$.

b) Dacă $m\notin\{1,2\}$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil

Se arată că dacă $m\in\{1,2\}$, atunci sistemul este compatibil 1-nedeterminat.

c) Dacă $m\notin\{1;2\}$, soluția unică este $(1;0;-1)$, ceea ce nu convine. Dacă $m=1$, soluțiile sunt $(1-\lambda;\lambda;-1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, iar dacă $m=2$, soluțiile sunt $(1;\mu;-1-\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$. Deci $m=2$.

2. a) Dacă $x=y=\hat{0}$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$.

$\forall\, x\in\mathbb{Z}_3$, $x^2\in\{\hat{0},\hat{1}\}$ și dacă $x\neq\hat{0}$ sau $y\neq\hat{0}$, se arată că $x^2+y^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$.

b) Dacă $X=A(a,b)\in H$ și $Y=A(c,d)\in H$, $X\cdot Y=A\left(ac+\hat{2}bd,\, bc+ad\right)\in H$

Dacă $X=A(a,b)\in H$, atunci $d=a^2+b^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$ și $X^{-1}=A\left(ad^{-1},\,\hat{2}bd^{-1}\right)\in H$

c) $X^2=I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\hat{2}b^2=\hat{1} \\ ab=\hat{0} \end{cases}$.

Pentru $a=\hat{0}$ ecuația $\hat{2}b^2=\hat{1}$ nu are soluții.

Pentru $b=\hat{0}$ rezultă $\hat{a}\in\{\hat{1},\hat{2}\}$ și soluțiile $X_1=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ și $X_2=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}$.